

软土流变特性的模型研究

刘林超¹, 闫启方¹, 孙海忠²

(1. 信阳师范学院 建筑工程系, 信阳 464000; 2. 暨南大学 力学与土木工程系, 广州 510632)

摘 要: 对于具有流变特性的软土来说, 模型的选取将直接影响其力学行为描述的准确性, 经典模型在描述软土流变特性方面存在着一定的缺陷; 对经典流变模型和分数导数流变模型进行了分析, 得出了分数导数流变模型在描述软土流变特性方面具有准确性和广泛的使用性的特性。

关 键 词: 流变; 粘弹塑性; 分数导数

中图分类号: O 317; TB 115

文献标识码: A

Study on model of rheological property of soft clay

LIU Lin-chao¹, Yan Qi-fang¹, Sun Hai-zhong

(1. Department of Architecture and Engineering, Xinyang Normal Institute, Xinyang 464000, China;

2. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: For soft clay which has rheological property, the selection of model is very important for describing mechanical behaviors. Classical model has some disadvantages for describing rheological property of clay; and the classical rheological model and the fractional derivative rheological model are analyzed and compared. The latter is more accurate than the former; and it has a wide application area.

Key words: rheology; viscoelastoplasticity; fractional derivative

1 引 言

软土(包括淤泥, 淤泥质土等)在我国分布广泛。它具有天然强度低、压缩性高、透水性小、固结时间长、流变特性显著等特点, 在长期荷载的作用下, 表现出明显的蠕变特性。软土地基上的建筑物常常会出现沉降过大, 承载力不足等问题, 因此, 流变模型的建立对于软土工程的建设、施工、加固、灾害预测和防治有着明显的实用价值。然而, 对于具有流变性质的软土来说, 本构关系的选取将直接影响其力学行为。因此, 本构关系选取的恰当与否是岩土工程数值模拟需要解决的重要问题。

软土的变形特性一直是岩土工程界讨论的热点之一。在实际工程中, 经常会遇到土所受的荷载不变, 但随时间的持续, 土体的变形将不断增大, 并最终导致破坏, 即土的流变行为。工程实践证明, 与时间无关的弹塑性理论不能描述软土的流变性质。目前国内外的研究绝大多数是采用流变经验公

式或流变元件模型将土的应力、应变表示成时间的显函数形式, 或者采用较能描述软土流变特性的经典黏弹性模型。陈宗基提出了黏弹性固结理论^[1], Merchant 建立了 Merchant 流变模型^[2], 村山塑郎和柴田彻提出了村山塑郎固结理论^[3], 詹美礼, 赵卫炳等^[4-6]基于修正 Komamura-huang 模型理论, 通过引入殷宗泽的双曲服面弹塑性本构模型建立了软土黏弹——黏塑性固结模型, 陈晓平, 白世伟建立了非线性黏弹性固结模型^[7], 而殷建华, Graham 建立了一个适用于单向压缩条件下土体的弹黏塑性本构模型^[8-10], Taylor 和 Merchant^[11]在固结变形分析中考虑了土的流变特性, 用多元件组合的流变模型来模拟土的骨架的变形; Gibson 和 Lo, 王盛源^[12]对软土蠕变特性进行了研究; 同时, 越来越多的学者认识到, 软土流变不是一种简单的线性特性, 而具有非线性的特性。Singh-Mitchell^[13], Mersi^[14]考虑了土的非线性流变特性; Burland^[15]提出了瞬时压密和迟滞压密的概念, 建立了荷载一

变形—时间的关系；Bjerrum-Galanger^[16]提出了固结时间—线的理论，探讨了软土固结变形的计算；Yin 和 Graham^[17]提出了时间线的一维黏弹塑性模型，引入了“等效时间”的概念；Dafalias 在其界面弹塑性模型基础上，进一步将非弹性应变分解为塑性应变和黏塑性应变两个不同的部分，并引入过应力函数来计算黏塑性应变；Mosleh 等在 Dafalias 等提出的界面弹塑性—黏塑性模型基础上，为了模拟包括蠕变破坏在内的应力—应变—时间响应过程，引入一个基于微观结构的损伤法则，并建议了相应的应力—应变—时间模型；陈远洪等^[18]在修正剑桥模型的基础上，考虑土的流变性，提出一种可较全面地反映土体变形的各种黏弹塑性特征的修正剑桥黏弹塑性模型。这些有关软土流变特性模型的研究在很大程度上促进了土力学的发展。随着人们对软土流变特性的进一步地认识和非线性理论、分形理论等的发展，软土流变模型理论也将得到进一步的发展和完善。本文针对经典流变模型和在土力学界刚刚起步的分数导数软土流变模型进行了分析讨论。

2 经典流变模型

经典的流变模型主要有两类组成，一类是黏弹塑性模型；一类是黏弹性模型。经典模型理论具有物理概念清晰的优点。所以，目前有关软土流变特性的研究中，大多采用这两类模型。

2.1 软土的黏弹塑性本构模型

对于饱和软土地基，软黏土的流变特性主要表现为变形与时间和应力水平有关，所显示的是具有弹性、塑性和黏滞性的黏弹塑性体，若采用具有双屈服面的殷氏本构模型描述土体的弹塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 、采用 Kelvin 体描述土体的黏弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^{ve}$ ，采用 Bingham 体描述土体的黏塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ ，则具有流变特性的软黏土地基中任一点在任一时刻的应变增量为

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^{ve} + d\epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

式中 $d\epsilon_{ij}^{ve} + d\epsilon_{ij}^p$ 所示的流变模型如图1所示。

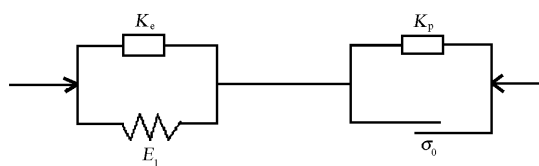


图1 黏弹塑性流变模型

Fig.1 Rheological model of viscoelastoplasticity

考虑土体的变形特征可得各个部分的应变增量，最终可以求得黏弹塑性模型为

$$\{d\epsilon_{ij}\} = [C]\{\sigma'\} + \frac{[A]\{d\sigma'\}}{E_1}(1 - e^{-\eta_e dt}) + dt \frac{1}{K_p} \left[\Phi \left(\frac{F_1}{F_{10}} \right) \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}} \right\} + \Phi \left(\frac{F_2}{F_{20}} \right) \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{ij}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \right] \quad (2)$$

其中， $\{d\epsilon\} = [d\epsilon_x, d\epsilon_y, d\epsilon_z]^T$ ， $\{d\sigma'\} = [d\sigma'_x, d\sigma'_y, d\sigma'_z]^T$ ；

$[C]$ 为弹塑性柔度矩阵； F_1, F_2 分别为殷氏模型第1、第2屈服函数； F_0 为使比值 $\frac{F}{F_0}$ 无量纲化的参考

值； $\eta_e = \frac{E_1}{K_e}$ ， E_1, K_e 分别为 Kelvin 体的黏弹性模型和黏滞系数； K_p 为黏塑性系数； σ_{ij} 为应力张量；

2.2 软土的黏弹性本构模型

描述软土的黏弹性模型由离散的弹性元件和黏性元件组成，根据弹簧和阻尼器的组合方式的不同，描述软土流变特性的黏弹性模型主要有 Kelvin 模型、三参数固体模型及其他模型，这里重点介绍 Kelvin 流变模型。Kelvin 流变模型由弹簧和阻尼器并联而成（见图2），其本构方程为

$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (3)$$

E, η 为模型参数。在恒力 σ_0 作用下 Kelvin 模型的蠕变表达式为

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_d}}) \quad (4)$$

其中， $\tau_d = \frac{\eta}{E}$ 。Kelvin 模型没有瞬时弹性，而是按

照 $\dot{\epsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{-\frac{t}{\tau_d}}$ 的变化率发生变形，应变随时间逐

渐趋近于其渐进值 $\frac{\sigma_0}{E}$ 。

上述研究是对软土蠕变特性和蠕变规律的深入认识，无疑为软土变形分析提供了强有力的工具。随着人们对软土流变特性认识的不断深入，逐渐发现这类流变模型只能用以说明某些现象，不能完全反映其实质。采用流变的理论方法研究软土问题越来越得到众多学者的认可，模型理论以其概念明确、易于理解而得到广泛应用，但模型理论只能解决线性流变问题，无论怎样改变模型中元件串并联方式和元件个数，都无法描述非线性流变问题。因此，目前人们多采用模型理论和经验性模型相结

合的方法来建立非线性流变模型,即用模型理论描述线性流变部分,用经验性模型描述非线性流变部分。基于此,人们多将软土的变形分为线性黏弹性、黏塑性,非线性黏弹性和黏塑性,这种划分概念上虽没有问题,但却增加了模型需确定的参数个数,实际上并没有提高模型的精度。

3 分数导数流变模型

经典模型理论虽然具有直观、物理概念清晰的优点,但具有在蠕变和松弛初期与试验数据不能很好吻合的缺点^[19],主要是由于经典流变模型的核心函数(蠕变柔量、松弛模量)常是指数函数的组合,这是由整数阶微分算子的性质决定的,欲精确描述试验的数据,常常不得不取消高阶的微分项或者以降低本构模型的应用范围为代价^[20]。针对软土所表现出的黏弹性性质和流变性质,目前已经有学者开始采用一种称为“分数导数本构模型”的物理关系去模拟软土的蠕变过程和松弛过程,将开尔文模型中的经典 Newton 黏壶用含有分数阶导数的力学单元取代,构成含分数导数的软土流变模型。

分数代数 Kelvin 固体模型的黏弹性体的本构方程为^[21]

$$\sigma(t) = G\varepsilon(t) + \eta D^\alpha [\varepsilon(t)] \quad (5)$$

式中 G, η 为材料常数; D^α 为 Riemann-Liouville 分数微分算子, $0 < \alpha < 1$, 其表达式为

$$D^\alpha [x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (6)$$

式中 Γ 为 Gamma 函数, $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\text{Re } z > 0$ 。

3.1 分数导数流变模型的松弛特性

软土的分数导数流变模型有分数导数 Kelvin 流变模型、三参数分数导数流变模型等多种模型,这里仅介绍应用较为广泛的分数导数 Kelvin 流变模型,如图 2 所示。描述软土的流变特性通常利用松弛模量和蠕变模量来表征,利用拉普拉斯变换或者傅立叶变换很容易就可以得到其松弛模量。分数导数 Kelvin 固体模型松弛模量为

$$Y(t) = q_0 \left[1 + \frac{1}{\Gamma(1-r)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{-r} \right] \quad t > 0, \tau = \frac{q_1}{q_0} \quad (7)$$

而 Kelvin 固体模型的松弛模量为

$$Y(t) = q_0 + q_1 \delta(t) \quad (8)$$

式中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数。

由 (7) 式和 (8) 式可以得到其相应的松弛曲

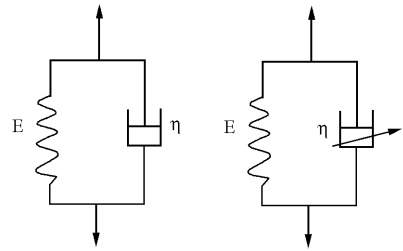


图 2 Kelvin 模型, 分数导数 Kelvin 模型
Fig.2 Kelvin model fractional Kelvin model

线,如图 3 所示。图 3 为采用分数代数 Kelvin 模型和经典 Kelvin 模型时的松弛曲线。由图易见,分数代数 Kelvin 模型能够很好地模拟出黏弹性材料的松弛特性,而经典的 Kelvin 模型没有此优点。

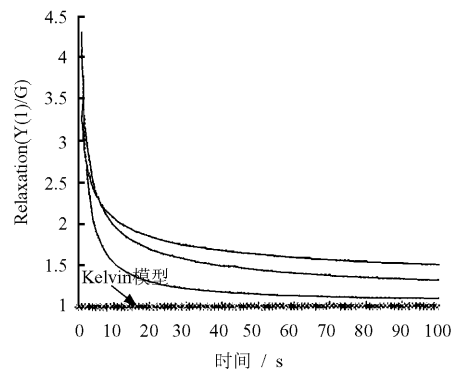


图 3 分数代数型黏弹性材料的松弛曲线
Fig.3 The relaxation curve of some fractional calculus viscoelastic material

3.2 分数导数流变模型的蠕变特性

分数导数 Kelvin 固体模型蠕变柔量为

$$J(t) = \frac{1}{q_0} [1 - E_r(t)], \quad t \geq 0 \quad (9)$$

$$\text{式 (9) 中, } E_r(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau} \right)^{rn}}{\Gamma(1+rn)} \quad (10)$$

而开尔文固体模型的蠕变柔量为:

$$J(t) = \frac{1}{q_0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0 \quad (11)$$

对于式 (11), $\lim_{r \rightarrow 1} E_r(t) = \lim_{r \rightarrow 1} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau} \right)^{rn}}{\Gamma(1+rn)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$

对比式 (9) 和式 (11), 可以发现分数导数 Kelvin 流变模型和 Kelvin 流变模型都能描述蠕变现象,但是,分数导数 Kelvin 流变模型中 r 的变动范围很大,因而可以更精确地描述材料的流变规律,其描述软土的范围也较为广泛。图 4 为针对软土的蠕变试验数据对分数导数 Kelvin 流变模型和 Kelvin 流变模型所进行的对比分析,从图可以看出,分数导数 Kelvin

流变模型在描述软土蠕变特性方面较经典 Kelvin 流变模型更接近试验数据, 更为准确。

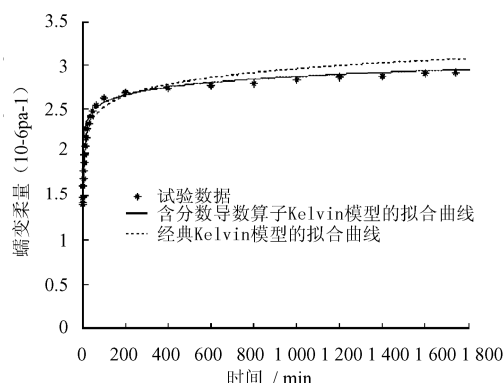


图4 分数导数 Kelvin 模型和 Kelvin 模型各自拟合曲线 (37.5 kPa)

Fig.4 Curves respectively simulated by fractional Kelvin model and Kelvin model (37.5 kPa)

引入分数算子, 并没有在数学上和力学分析上带来多少困难, 却能更加深入地了解软土微观结构的复杂性如何影响其宏观行为。随着非线性科学的发展, 分数导数本构模型对软土复杂性的描述, 将随着研究的深入而逐渐揭示出来, 并将推动土力学、流变理论等相关学科的发展。采用分数微积分来描述软土的流变本构关系这一新思路在国际上也属于起步阶段。经典的关于软土流变特性的研究都是基于传统弹性、黏弹性、弹塑性本构模型建立起来的, 鉴于分数算子在黏弹性本构建模方面具有确定模型所需试验参数少、能在较宽的频率范围内描述软土的流变行为等诸多优点, 已经引起了岩土工程界的密切关注。

4 结 论

经典模型在描述软土流变特性方面具有物理概念清晰、直观易懂等优点, 但具有在蠕变和松弛初期与试验数据不能很好吻合的缺点, 而且确定模型所需的试验参数较多; 分数导数流变模型具有确定模型所需试验参数少、能在较宽范围内描述软土的流变行为, 能更加深入地了解软土微观结构的复杂性如何影响其宏观行为。随着非线性科学和分形理论的发展, 采用分数微积分来描述软土的流变本构关系这一新思路将会得到进一步的发展。

参 考 文 献

- [1] 陈宗基. 固结及时间效应的单维问题[J]. 土木工程学报, 1958, 5(1): 1—10.
- [2] 赵维炳, 施健勇. 软土固结与流变[M]. 南京: 河海大学出版社, 1997: 200—214.

- [3] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996: 111—115.
- [4] 詹美礼, 钱家欢, 陈绪禄. 软土流变特性试验及流变模型[J]. 岩土工程学报, 1993, 15(3): 54—62.
- [5] 赵维炳, 詹美礼, 顾吉. 软黏土黏弹—黏塑性模型及参数确定, 中国青年学者岩土工程力学及其应用讨论会论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1994: 104—109.
- [6] 余志顽, 赵维炳, 顾吉. 黏弹—黏塑性软基排水预压的三维有限元分析[J]. 河海大学学报, 1995, 23(5): 1—7.
- [7] 陈晓平, 白世伟. 软土蠕变-固结特性及计算模型研究分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(5): 728—734.
- [8] Yin J H, Graham J. Viscous-elastic-plastic modeling of one-dimensional time-dependent behavior of clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1989, 26: 199—209.
- [9] Yin J H, Graham J. Equivalent times and elastic visco-plastic modeling of time-dependent stress-strain behavior of clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1994, 31: 42—52.
- [10] Yin J H, Graham J. Elastic visco-plastic modeling of one-dimensional consolidation[J]. *Geotechnique*, 1996, 46(3): 515—527.
- [11] 维亚洛夫 C. 土力学的流变原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [12] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利电力出版社, 1988.
- [13] Singh A, Mitchell J K. General-stress-strain time function for soils *Journal of Soil Mechanics and Foundations*[J]. *American Society of Civil Engineers*, 1968, 94(1): 21—46.
- [14] Mesri G. Shear-strain-time behavior of clays[J]. *Geotechnique*, 1981, 31(4): 37—52.
- [15] Burland J B. On the compressibility and shear strength of natural clays[J]. *Geotechnique*, 1990, 40(3): 329—378.
- [16] Bjerrum L. Engineering geology of normally consolidated marine clays as related to the settlement of buildings[J]. *Geotechnique*, 1967, 17(2): 83—118.
- [17] Yin J H, Graham J. Elastic visco-plastic modeling of one-dimensional consolidation[J]. *Geotechnique*, 1996, 46(3): 515—52.
- [18] 陈远洪, 洪宝宁, 龚道勇, 等. 一个考虑土体流变的修正剑桥粘弹塑性模型[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2002, 30(5): 44—47.
- [19] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2001, 23(1): 30—35.
- [20] 刘林超, 张卫. 具有分数 Kelvin 模型的黏弹性岩体中水平圆形硐室的变形特性, 岩土力学, 2005, 26(2): 287—289.
- [21] SHIMIZU Nobuyuki, ZHANG Wei. Fractional calculus approach to dynamic problem of viscoelastic materials. [J]. *JSME*, 1999, 1(42): 827—830.